

Известия вузов. Строительство. 2021. № 12. С. 5–23.

ISSN 0536-1052

News of Higher Educational Institutions. Construction. 2021; (12): 5–23.

ISSN 0536-1052

Научная статья

УДК 691.328:539.37

DOI: 10.32683/0536-1052-2021-756-12-5-23

### ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДЕГРАДАЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ФРАКТАЛЬНОГО СТРОЕНИЯ СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА

Владимир Павлович Селяев<sup>1</sup>, Павел Владимирович Селяев<sup>1</sup>,  
Ерлан Ергалиевич Хамза<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Мордовский государственный университет  
им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия

<sup>2</sup>Казахский национальный исследовательский технический университет  
им. К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

**Аннотация.** Исходя из принципов фрактальной геометрии Б. Мандельброта и теории разрушения А. Гриффитса предложены модели для описания процесса деградации железобетонных изгибаемых элементов. Выполнено экспериментальное обоснование фрактального строения структуры бетона. Установлено, что фрактальная размерность является объективной характеристикой степени однородности структуры. Экспериментально доказано, что в процессе нагружения бетона развивается процесс деградации структуры, который выражается в последовательном разрушении фракталов на различных масштабных уровнях. Найдена аналитическая зависимость между прочностью бетона при сжатии, растяжении и коэффициентом трения.

**Ключевые слова:** бетон, деградация, прочность, фрактал, модель

**Для цитирования:** Селяев В.П., Селяев П.В., Хамза Е.Е. Основы теории деградации и прогнозирования долговечности железобетонных конструкций с учетом фрактального строения структуры материала // Известия вузов. Строительство. 2021. № 12. С. 5–23. DOI: 10.32683/0536-1052-2021-756-12-5-23.

Original article

### FOUNDATIONS OF THE THEORY OF DEGRADATION AND PREDICTION OF THE DURABILITY OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES, TAKING INTO ACCOUNT THE FRACTAL STRUCTURE OF THE STRUCTURE

Vladimir P. Selyaev<sup>1</sup>, Pavel V. Selyaev<sup>1</sup>, Erlan E. Khamza<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ogarev National Research Mordovian State University, Saransk, Russia

<sup>2</sup>Kazakh National Research Technical University named after K.I. Satpayev,  
Almaty, Kazakhstan

**Abstract.** Based on the principles of fractal geometry by B. Mandelbrot and the theory of fracture by A. Griffiths, models are proposed to describe the process of degradation of reinforced concrete bending elements. An experimental substantiation of the fractal structure of the concrete structure has been carried out. It was found that fractal dimension is an objective characteristic of the degree of structure homogeneity. It has been experimentally established that in the process of loading concrete, the process of degradation of the structure develops, which is expressed in the successive destruction of fractals at various scale levels. An analytical relationship has been established between the strength of concrete in compression, tension and the coefficient of friction.

**Keywords:** concrete, degradation, strength, fractal, model

**For citation:** Selyaev V.P., Selyaev P.V., Khamza E.E. Foundations of the theory of degradation and prediction of the durability of reinforced concrete structures, taking into account the fractal structure of the structure. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2021; (12): 5–23. (In Russ.). DOI: 10.32683/0536-1052-2021-756-12-5-23.

**Введение.** Железобетон является композиционным материалом, состоящим из матрицы (бетона) и усиливающего компонента – арматуры. Поэтому процесс деградации железобетона будет определяться ухудшением свойств как бетона, так и арматуры, их отношением к действию нагрузок и агрессивных сред. В предлагаемой работе рассматривается процесс деградации цементного бетона железобетонных конструкций.

Бетон изначально имеет блочно-иерархическую неоднородную структуру и содержит множество дефектов различного уровня и генезиса [1–4]. Экспериментально установлено, что структура каменных материалов формируется из блоков, подобных на различных масштабных уровнях, по принципу «блок в блоке», «структура в структуре» [5–9]. Признаки многомасштабности и самоподобия структуры являются по Б. Мандельброту основными постулатами фрактальной геометрии [5].

Длительное время теория разрушения железобетонных конструкций формировалась на основе принципов механики деформируемого твердого тела, которые не отражали особенности строения структуры, работы бетона под нагрузкой. Разрушение рассматривалось как мгновенный акт, который наступает при условии, что напряжения в материале или усилия, воспринимаемые сечением, достигнут предельных значений.

На смену гипотезам о сплошной, однородной среде формируются представления о дискретно-непрерывном строении структуры материала [1–19]. В работах М.А. Садовского, С.А. Христиановича, Е.И. Шемякина, В.А. Сарайкина, А.И. Чанышева, М.В. Курлени, А.Н. Опарина отмечается, что в процессе нагружения каменных материалов возникает дискретная иерархия фрагментов с определенной последовательностью преимущественных размеров [6–9, 11–17].

По мнению В.И. Соломатова, С.М. Скоробогатова, Ю.В. Зайцева, Е.М. Чернышева, структура бетона фрагментарна, неоднородна, многофазна. В процессе эксплуатации под действием внешнего энергетического поля в объеме бетона происходит генерация и накопление микротрещин, дефектов, которые инициируют процесс разрушения. Интенсивность и характер эволюции структуры бетона зависит от вида энергетического воздействия, уровня напряжений статических и динамических, температуры, влажности, химической агрессивности среды [1–4].

В работах В.В. Новошилова, Ю.В. Петрова [20, 21] для описания процесса разрушения материалов с дискретным, блочным строением структуры предлагается квантово-механический подход, основанный на постулатах: о дискретном характере выделения и поглощения энергии (энергия выделяется и поглощается элементарными порциями – квантами). Процесс разрушения является многоступенчатым и многоуровневым. Все твердые тела состоят из пространственных структурных элементов конечного размера. Элементарный акт разрушения есть разрушение одного структурного элемента. Параметры критерия разрушения, в том числе и размер структурного элемента должны выбираться так, чтобы в предельных случаях выполнялся принцип соответствия [19, 20].

При всем многообразии проявления неоднородностей бетон имеет блочно-иерархическую структуру, которая соответствует принципам многомасштабности и самоподобия. Следовательно, при описании процесса деградации структуры бетона необходимо учитывать иерархию блочной структуры, коэффициент вложенности одних блоков в другие. Предполагается, что контакт между блоками можно представить в виде дилатансионных оболочек, которые по свойствам отличаются от материала массива.

**Цель работы** – разработка основ деградации железобетонных конструкций. Решение поставленной задачи основано на принципах фрактальной геометрии Б. Мандельброта и теории А. Гриффитса.

Работами Т.А. Низиной, Л.М. Ошкиной, Л.И. Куприяшкиной доказано, что структура бетона обладает явно выраженной фрагментарностью, неоднородностью, изломанностью и искривленностью ее элементов. На рис. 1 приведены данные об изменении микротвердости твердой фазы композита в пределах поперечного сечения призмы, которые свидетельствуют о том, что микротвердость, а следовательно, и прочность композита распределены крайне неравномерно [4, 22–24].

Кроме того, в матрице имеются включения: твердость которых на несколько порядков выше твердости матрицы (зерна заполнителя и наполнителя); с нулевой твердостью – поры, заполненные газом или водой. Для моделирования, описания свойств подобных объектов предлагается применять методы фрактальной геометрии.

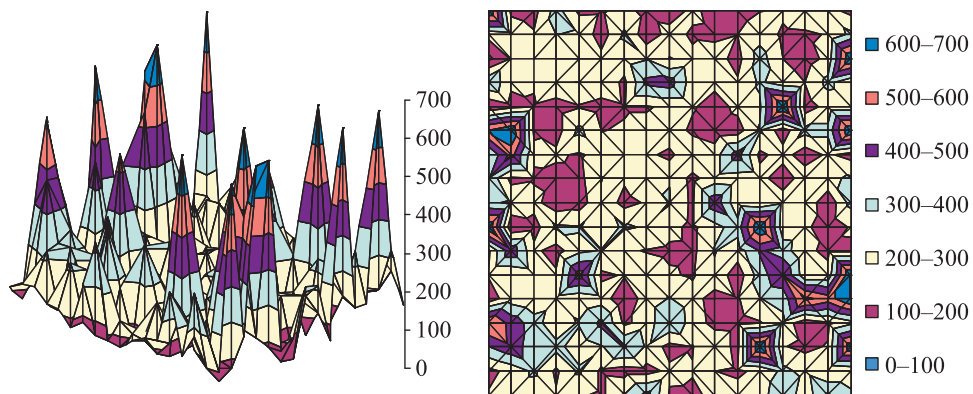


Рис. 1. Распределение микротвердости по поверхности наполненных диатомитом цементных композитов

Fig. 1. Microhardness distribution over the surface of diatomite-filled cement composites

### Фрактальная размерность структуры цементных композитов $D$ ( $d = 2$ ) на различных масштабных уровнях

#### Fractal dimension of the structure of cement composites $D$ ( $d = 2$ ) at various scale levels

№ п/п	Состав цементных композитов			Фрактальная размерность $D$ ( $d = 2$ )	
	Цеолит, %	Песок/цемент	В/Ц	ув.×10	ув.×20
1	10	4/1	0,6	2,55	2,47
2	17	2/1	0,6	2,42	2,40
3	20	1/1	0,6	2,03	2,03
4	10	3/1	0,7	2,20	2,20
5	10	2/1	0,8	2,22	2,20

Для подтверждения самоподобия (масштабной инвариантности) структур бетона были определены фрактальные размерности на различных масштабных уровнях [4, 21–23]. Установлено, что фрактальная размерность является объективной характеристикой степени однородности структуры. Прослеживается четкая зависимость фрактальной размерности от степени наполнения цементных композитов. Если фрактальная размерность матрицы (связующее без наполнителя)  $D = 1,23$  ( $d = 1$ ), то при наличии минерального зернистого наполнителя  $D = 1,5–1,8$  ( $d = 1$ ). В то же время фрактальная размерность практически не зависит от масштабного уровня анализируемых структур (таблица).

Этот вывод подтверждается при фрактальном анализе поровой структуры цементных композитов. Экспериментально установлено, что фрактальная размерность поровой структуры цементных композитов не зависит от масштаба увеличения и принимает значения 1,418; 1,430; 1,445, которые соответствуют соотношению цемент/песок – 1/2; 1/3; 1/4.

Фрагментарность строения структуры бетона подтверждается и при исследовании распределения микротвердости (модуля упругости, прочности) в пределах площади боковых поверхностей железобетонных балок. Железобетонные балки с размерами поперечного сечения 10×20 см и пролетом 90 см были армированы композитной арматурой. Анализ распределения прочности бетона в пределах площади боковой поверхности балки производился на основе экспериментальных данных, полученных М.Ф. Алимовым неразрушающим методом контроля прочности по данным измерений прибором Пульсар-1 [25].

Фрактальную размерность устанавливали методом сечений, основанным на определении длины профиля кривой распределения прочности по длине образца (рис. 2). Для этого используем формулу

$$D = k \zeta \frac{l_n N_i}{l_n (1/m_i)}, \quad (1)$$

где  $m_i$  – заданный масштаб;

$N_i$  – количество масштабных единиц по длине профиля.

По данным, представленным на рис. 2 при масштабе измерения  $m_i = 1/8$ , будем иметь  $N = 10$  и  $D = 1,1$ . Следовательно, фрактальное строение структу-

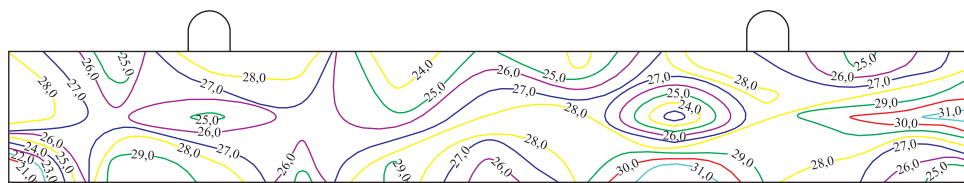


Рис. 2. Распределение прочности бетона на боковой поверхности балки, определенное неразрушающим методом

Fig. 2. Distribution of concrete strength on the side surface of the beam determined by the non-destructive method

ры подтверждается и на макроуровне. По длине балки можно выделить пять блоков, отличающихся прочностью бетона.

Гипотеза о фрактальном строении структуры цементных композитов подтверждается как по результатам анализа фрактальной размерности структуры, так и по экспериментальным данным, полученным в результате расшифровки диаграммы деформирования при сжатии образцов из бетона. Установлено, что разрушение композитов при нагружении является дискретно-непрерывным процессом, который суммируется из множества отдельных, частных актов разрушения фрактальных кластеров [9].

Экспериментальные исследования проводились с применением комплекса Welle Geotechnik (модель 13-PD/401), который позволяет испытывать на сжатие бетонные призмы при скорости нагружения 0,5 мм/мин и снимать показания изменения деформаций через каждые 0,1 с. Сверхчастотные измерения деформации позволили зафиксировать дискретность непрерывного процесса разрушения. На диаграмме деформирования (рис. 3) четко фиксируются моменты сброса и подъема нагрузки, связанные с разрушением (на наш взгляд) отдельных структурных элементов. Прерывистое развитие процесса деформирования имеет явное отличие на различных участках по мере роста деформации. Предположим, что каждый сброс нагрузки означает разрушение фрактала (или группы). Тогда, подсчитав количество сбросов нагрузки (отказов фракталов), можно построить график изменения интенсивности отказов с ростом деформаций. График частоты отказов структурных элементов, полученный по данным диаграммы деформирования, представлен на рис. 4, 5.

Интенсивность отказов – число отказавших структурных элементов в единицу времени, отнесенное к числу изделий, оставшихся исправными к началу рассматриваемого промежутка времени, определяли по формуле

$$\lambda_j = \frac{j(\Delta t_i)}{(m-j)\Delta t},$$

где  $j(\Delta t_i)$  – число отказов за промежуток времени  $\Delta t_i$ ;

$m$  – начальное число элементов в системе;

$j$  – общее число отказавших элементов за время  $\Delta t$ .

Вид графиков интенсивности отказов (см. рис. 4) и  $\lambda$ -критерия (см. рис. 5) соответствует классическим представлениям об интенсивности отказов элементов в сложной системе в зависимости от переменного параметра ( $t$  или в данном случае относительной деформации  $\epsilon$ ) [4]. На графике рис. 5 представлены четыре области: первая повышенной интенсивности отказов отра-

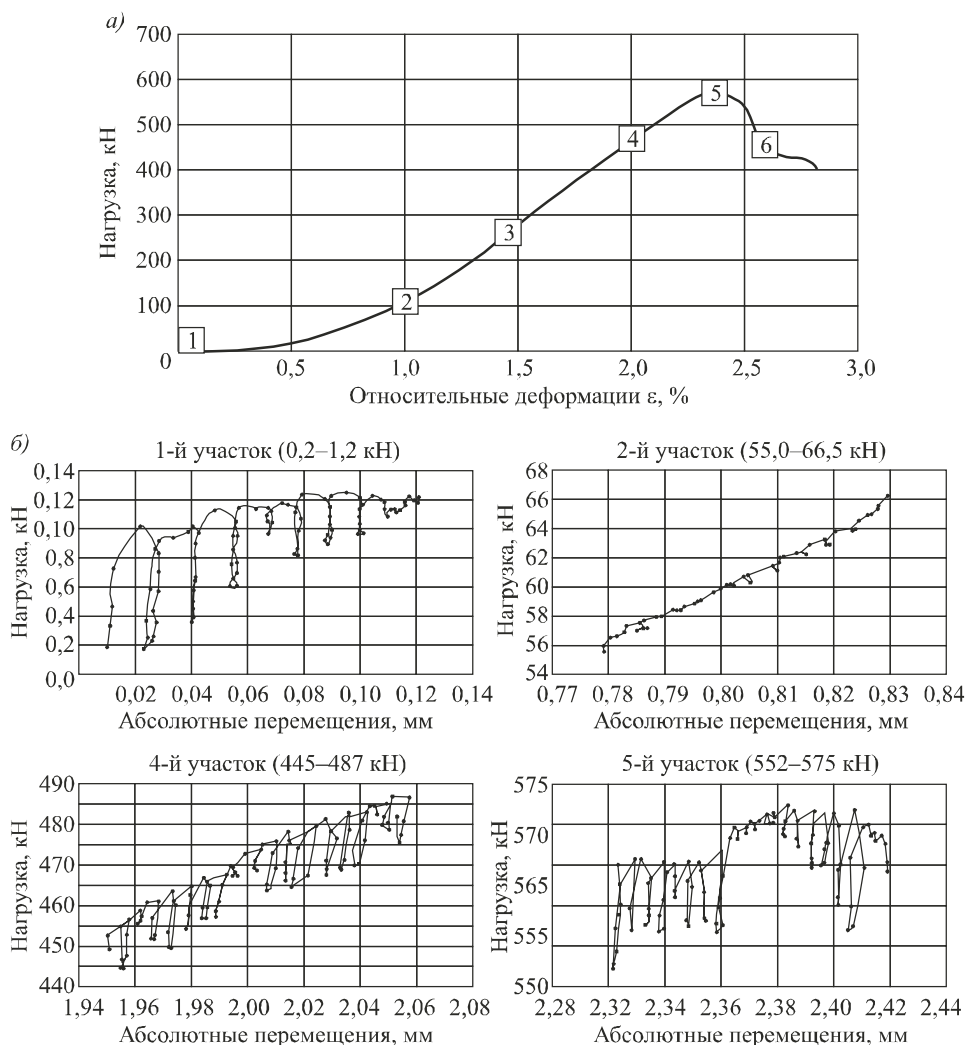


Рис. 3. Диаграмма зависимости нагрузки от перемещения (скорость 0,5 мм/мин, частота сбора данных 0,1 с)

*a* – общий вид диаграммы деформирования; *б* – вид участков 1, 2, 4, 5

Fig. 3. Diagram of load dependence on displacement (speed 0,5 mm/min, data collection frequency 0,1 s)

*a* – general view of the deformation diagram; *b* – type of plots 1, 2, 4, 5

жает наличие скрытых дефектов, которые формируются из-за технологических нарушений. Вторая область стабильной работы системы характеризуется незначительной равномерной интенсивностью отказов, третья область определяет нарастание отказов, разрушение фракталов; четвертая показывает лавинообразный характер нарастания интенсивности отказов структурных элементов.

График накопления повреждений (см. рис. 4) в структурной системе соответствует классическим представлениям (моделям) о накоплении повреждений в сложных системах.

При анализе интенсивности отказов структурных элементов в качестве переменной величины принимали относительную деформацию  $\epsilon$ , изменение

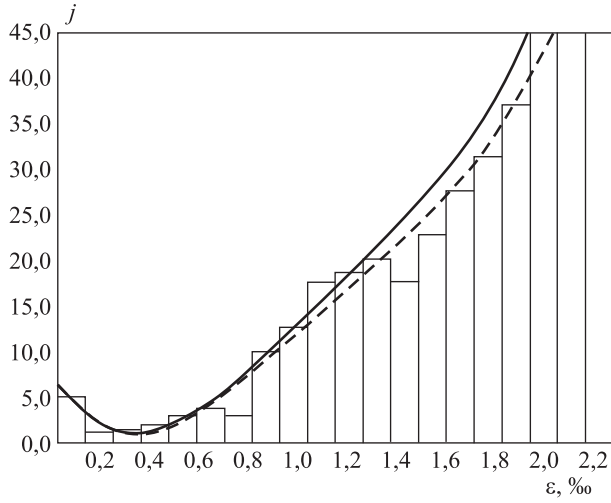


Рис. 4. Гистограмма частоты отказов в интервале  $\Delta\varepsilon$  с ростом деформаций  $\varepsilon$ , ‰

Fig. 4. Histogram of the failure rate in the interval  $\Delta\varepsilon$  with the growth of deformations

которой происходит в интервале от нулевого значения  $\varepsilon = 0$  до предельного  $\varepsilon = \varepsilon_{bu}$ , соответствующего пределу прочности. Тогда  $\lambda$ -характеристику можно записать через относительные деформации и, принимая  $U(\varepsilon) = \frac{E\varepsilon^2}{2}$ , в следующем виде

$$\lambda = \lambda_0 \frac{E}{2} \alpha \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bu}} \right)^{\alpha-1} = \beta \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bu}} \right)^{\alpha-1}, \quad (2)$$

где  $E$  – модуль упругости материала;  
 $\varepsilon_{bu}$  – предельная деформация бетона.

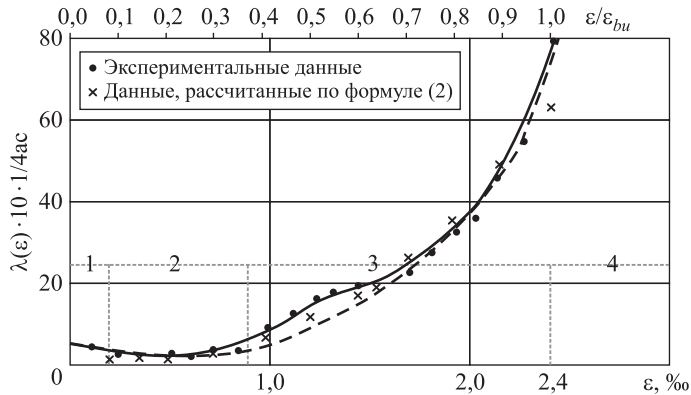


Рис. 5. График  $\lambda$ -критерия случайного процесса разрушений фракталов с ростом деформаций

Fig. 5. Graph of the  $\lambda$ -criterion for the random process of fractal destruction with increasing deformations



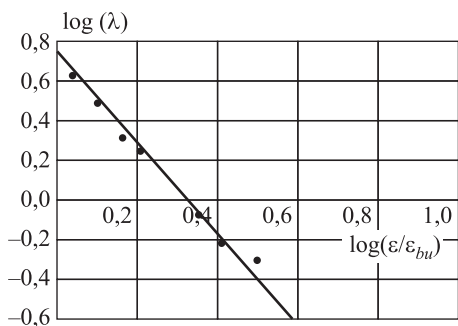


Рис. 6. Линеаризация зависимости  $\lambda = f(\epsilon/\epsilon_{bu})$

Fig. 6. Linearization of dependence  $\lambda = f(\epsilon/\epsilon_{bu})$

Параметры  $\lambda$  и  $\beta$  определены по экспериментальным данным, приведенным на рис. 5. Для этого линеаризуем функцию (2) методом логарифмирования.

Получим уравнение

$$\log \lambda = \log \beta + (\alpha - 1) \log \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{bu}} \right).$$

В логарифмических координатах экспериментальные данные хорошо ложатся на прямую линию в осях  $\log \lambda - \log(\epsilon/\epsilon_{bu})$  и тогда получаем  $\beta = 6,3$ ;  $\alpha = 2,4$  (рис. 6).

Подставив значения  $\alpha$  и  $\beta$  в формулу (2), вычисляем  $\lambda$  по соответствующим значениям  $(\epsilon/\epsilon_{bu})$ . На рис. 4 показано, что вычисленные значения достаточно адекватны экспериментальным данным.

В результате анализа диаграмм деформирования, полученных путем испытания на сжатие бетонных призм  $40 \times 40 \times 160$  при скорости нагружения  $0,5$  мм/мин и частотой измерения перемещений  $0,1$  с, установлено:

график деформирования при высокочастотном измерении перемещений можно рассматривать как репрезентативную выборку отказов структурных элементов (фракталов), которая подтверждает дискретно-непрерывный характер разрушения бетона под нагрузкой;

графоаналитическая обработка экспериментальных данных подтверждает фрактальную природу процесса разрушения.

Действие агрессивных сред на бетон ускоряет процесс дезинтеграции фрактальной структуры, сопровождается ухудшением (деградацией) неравномерным по объему изделия, свойств материала. При этом визуально и инструментально установлено изменение прочности, жесткости, твердости (рис. 7).

Для аналитического описания процессов деградации необходимо разработать расчетные модели, позволяющие прогнозировать ресурс конструкции, ее долговечность в заданных условиях эксплуатации.

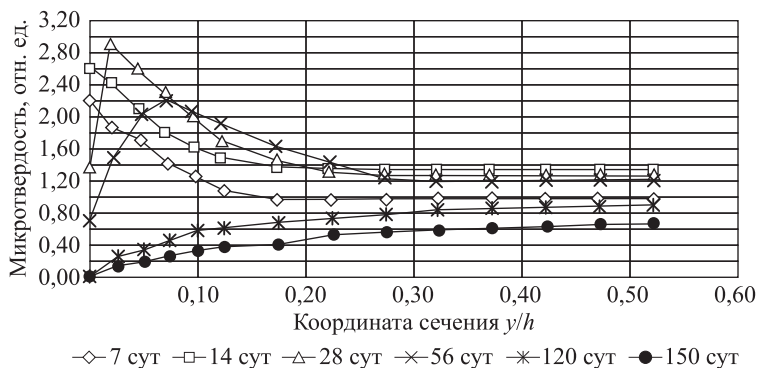


Рис. 7. Изменение микротвердости цементного камня (наполнение – шлак) в 2%-м растворе  $H_2SO_4$

Fig. 7. Change of the cement stone microhardness (filling – slag) in 2%  $H_2SO_4$  solution



Каждый процесс деградации можно описать соответствующей функцией вида

$$D = B(t)/B(0) = f(t, T, \sigma, c, h, K_{xc}, \alpha, E, R, \omega_0, t_{0,5}), \quad (3)$$

где  $t$  – время;

$T$  – температура;

$\sigma$  – напряжение;

$E, R$  – модуль упругости и прочность композита;

$\omega_0$  – сорбционная емкость;

$t_{0,5}$  – время полураспада;

$c$  – концентрация агрессивной среды;

$h$  – геометрическая характеристика;

$K_{xc}$  – коэффициент химического сопротивления;

$a$  – глубинный показатель.

Для изгибаемых элементов деградационные функции жесткости и несущей способности имеют вид:

$$D(Wu) = \iint_{F(t)} E(t, y, x) y^2 dx dy / \iint_{F(0)} E(t_0, y, x) y^2 dx dy; \quad (4)$$

$$D(M_p) = \iint_{F(t)} \varepsilon(t, x, y) E(t, y, x) y dx dy / \iint_{F(0)} \varepsilon(t_0, x, y) E(t_0, y, x) y dx dy; \quad (5)$$

$$D(M) = \iint_{F(t)} \sigma(t, y, x) y dx dy / \iint_{F(0)} \sigma(t_0, y, x) y dx dy. \quad (6)$$

Предлагается основные механизмы деградации представить феноменологическими диффузионными, гомогенными моделями в виде эпюр твердости модуля упругости или прочности по высоте поперечного сечения изделия, которые в зависимости от характера изохрон деградации могут быть линейными и нелинейными, симметричными и несимметричными.

Для описания деградации цементных композитов в растворах малой концентрации предлагается модель, представленная на рис. 8. Эта диффузионная модель применима для материалов, у которых на изохроне деградации мож-

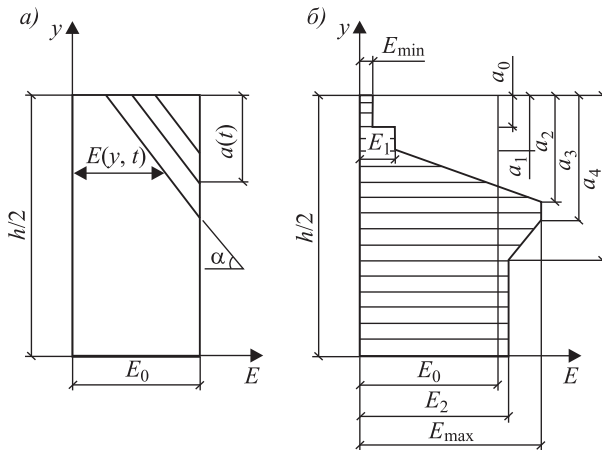


Рис. 8. Феноменологические модели деградации  
Fig. 8. Degradation phenomenological models

но выделить три зоны: 1) деструкции; 2) латентной деградации; 3) естественного твердения.

В процессе эксплуатации конструкции в условиях действия агрессивных сред удобнее в качестве параметров деградации использовать глубинный показатель  $a$  и относительное изменение свойств на поверхности элемента ( $K_{xc} = E(t)/E(0)$ ). Если в качестве упругопрочностной характеристики принять модуль упругости, то с учетом модели, представленной на рис. 8, б, деградационная функция жесткости элемента прямоугольного сечения с размерами  $b \cdot h$  при сжатии ( $D(W_c)$ ) определяется выражением

$$D(W_c) = \frac{W_c(t)}{W_0(t)} = 2 \int_0^{h/2} E(y) b dy / (E_0 b h).$$

Если  $a_1 = a_0$ ,  $a_2 = a_0$ ,  $a_3 = a_0$ ,  $a_4 = a_0$ ,  $E_{\max} = E_0$ ,  $E_1 = E_0$ ,  $E_2 = E_0$  и  $E_{\min} = 0$ , то имеем модель гетерогенной деградации

$$D(W_c) = 1 - 2a_0/h.$$

Модель гомогенной деградации также является частным случаем обобщенной модели, так как при  $\alpha = 0$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = h/2$ ,  $E_{\max} = E_1$  и  $E_2 = E_1$ .

Применение фрактального подхода дает возможность изучать процессы деградации, определять показатели химического сопротивления на самоподобных объектах малого размера.

По Б.Б. Мандельброту структура фрактальна, если состоит из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Следовательно, формируя фрактальную модель разрушения композита, необходимо, в соответствии с первым принципом, структуру на каждом масштабном уровне представить в виде системы структурных элементов, подобных целому.

Построим фрактальную модель структуры бетона (рис. 9) с учетом условий: в бетоне имеются трещины  $\ell_i$ , ориентация которых относительно силовых линий произвольная; размер трещин коррелируется с размером дефектов  $d_i$ ; при изготовлении бетонных изделий формируется множество врожденных дефектов, размеры которых зависят от качественного уровня технологий; каждой технологии изготовления цементных композитов соответствуют дефекты  $\ell_0$ , размер которых можно нормировать, как показатель качественного уровня технологии; прочность цементных композитов на различных масштабных уровнях структуры зависит от размеров трещин (дефектов) и упругопрочностных свойств матрицы.

В теории Гриффитса длина трещины  $2\ell_0$  рассматривается как расстояние, измеренное по прямой от начала до конца трещины. Но при фрактальной структуре материала «берега» трещины имеют характер ломаной кривой. Следовательно, истинная длина трещины разрушения и соответственно величина поверхностной энергии будет больше, чем учитывается в модели Гриффитса.

Максимальную длину трещины, образованной при ее развитии в композите с фрактальной структурой, предложено аппроксимировать функцией вида

$$L(\alpha) = L_0 \alpha^{d_i - D_i}, \quad (7)$$

где  $d_i$  – топологическая размерность;

$D_i$  – фрактальная размерность;

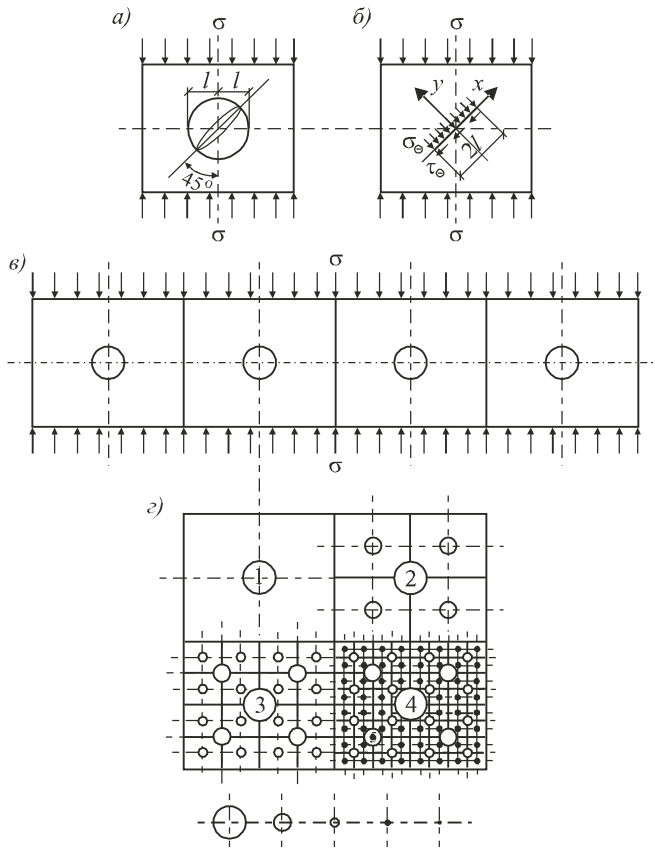


Рис. 9. Фрактальная модель структуры бетона  
 а – первичный фрактал; б – расчетная модель фрактала;  
 в – цепочный фрактал; г – плоский фрактал  
 1, 2, 3, 4 – уровни структуры

Fig. 9. Fractal model of concrete structure  
 a – primary fractal; b – fractal calculation model; v – chain  
 fractal; g – flat fractal  
 1, 2, 3, 4 – structure levels

$\alpha$  – масштабный уровень измерения;

$L_0$  – длина трещины от точки А до Б по прямой линии. Для гладкой прямой линии ( $i = 1$ )  $d_i = 1$ ; для гладкой поверхности  $d_i = 2$ ,  $i = 2$ .

С учетом фрактальности строения структуры композита уравнение баланса энергий высвобождаемой (энергия релаксации упругих связей) и расходуемой на приращение трещины разрушения  $V$  можно записать в виде

$$W = V - U = L(\alpha)\gamma - 0,5\sigma\epsilon A,$$

где  $\gamma$  – удельная плотность поверхностной энергии;

$$L(\alpha) = 4\ell\delta\alpha^{d_i - D_i};$$

$\delta$  – толщина пластины с трещиной ( $\delta = 1$ );

$A = \pi\ell^2$  – площадь релаксации;

$$U = 0,5\pi\sigma^2\ell_0^2 / E.$$

Критическая (для заданных напряжений  $\sigma$ ) длина трещины  $2\ell$  будет соответствовать максимуму функции  $W$ , который находим из условия  $dW/d\ell=0$ . Отсюда получаем:

$$\ell_0 = \frac{4\gamma E}{\pi\sigma_\alpha^2} \alpha^{d_i-D_i}; \quad \sigma_\alpha = \sqrt{\frac{4\gamma E}{\pi\ell_0}} \alpha^{d_i-D_i}; \quad \sigma_\alpha = \sigma \alpha^{(d_i-D_i)0,5}. \quad (8)$$

Фрактальная размерность (Хаусдорфа–Безиковича)  $D_i$  определяется экспериментально.

Если формулы Гриффитса записать с учетом полученного решения (8), то получим выражения для определения прочности композита на различных масштабных уровнях  $\alpha$  в следующем виде:

$$R_{bt\alpha} = \frac{k_{1i}}{\sqrt{0,5\pi\ell_{0i}}} \alpha^{0,5(1-D)}; \quad (9)$$

$$R_{bi\alpha} = \frac{4k_{2i}}{\sqrt{0,5\pi\ell_{0i}(1-\gamma)}} \alpha^{0,5(1-D)}; \quad \frac{R_b}{R_{bt}} = 4 \frac{k_2}{k_1} \frac{1}{(1-\gamma)}. \quad (10)$$

Для подтверждения достоверности полученных решений проведем анализ экспериментальных данных, представленных в нормативной (СНиП 2.03.01–84) и научной литературе. Известны решения Хука–Бенявского и Брейса–Марела, в которых показана зависимость прочности горных пород от коэффициента трения  $\gamma$  и получены выражения, аппроксимирующие соотношения прочности при сжатии и растяжении.

Зависимость коэффициента трения  $\gamma$  от класса бетона по прочности на сжатие  $B$  определена экспериментально в виде линейной функции

$$\gamma = 0,4 + 0,005 B. \quad (11)$$

Формула получена по экспериментальным данным испытания бетонов классов В10–В50 и результаты хорошо аппроксимируются прямыми линиями (рис. 10). Анализ данных показывает, что формула (10) более адекватно (график 3 на рис. 11) описывает соотношение между коэффициентом  $\gamma$  прочностью при сжатии и растяжении, чем формулы Хука–Бенявского (график 1, рис. 11) и Брейса–Морела (график 2, рис. 11). При этом установлено, что  $k_1/k_2 = 1,3-1,4$ .

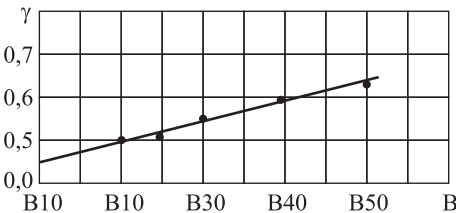


Рис. 10. Зависимость коэффициента трения от класса бетона на осевое сжатие В  
Fig. 10. Dependence of the coefficient of friction on the concrete class on axial compression В

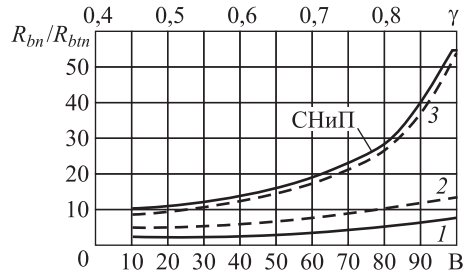


Рис. 11. Зависимость соотношения  $R_{bn}/R_{btm}$  от класса бетона на осевое сжатие В и коэффициента трения  $\gamma$   
Fig. 11. Dependence of the ratio  $R_{bn}/R_{btm}$  on the class of concrete for axial compression В and the coefficient on friction  $\gamma$

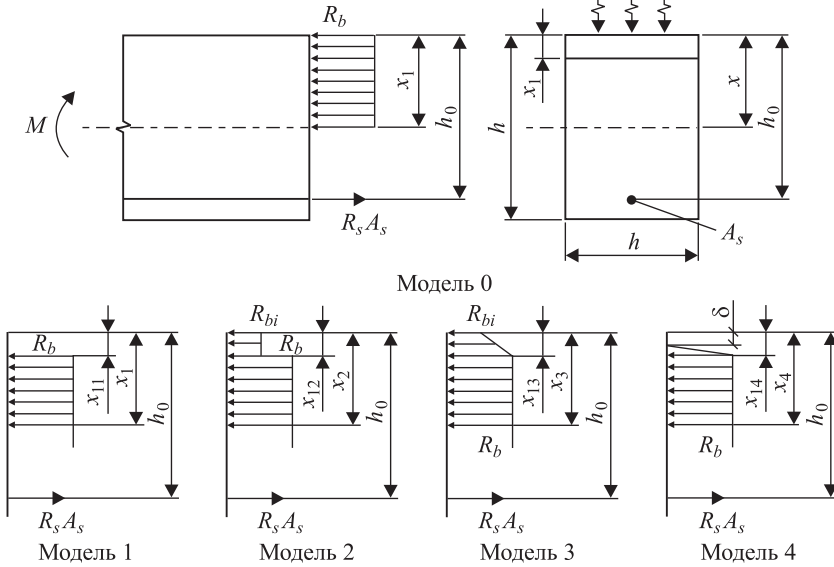


Рис. 12. Деграционные модели для расчета долговечности изгибаемого элемента по прочности нормальных сечений

Fig. 12. Degradation models for calculating the durability of a bent element from the strength of normal sections

С учетом полученных результатов рассмотрим изгибаемый элемент с прямоугольной формой поперечного сечения и одиночной арматурой (например, плита с арматурой в растянутой зоне). Предположим, что дегградация бетона плиты вызвана жидкими агрессивными средами, действие которых обусловлено технологической линией, расположенной на вышележащих этажах. Возможные модели дегградации по прочности поперечного сечения, нормального к оси изгибаемого элемента, показаны на рис. 12.

На расчетных схемах показано, что зона дегградации ( $x_{ij} = a$ ) находится в пределах сжатой зоны ( $x_{ij} \leq x_i$ ), расчетное сопротивление, модуль деформаций в пределах зоны дегградации могут изменяться по различным законам.

На рис. 12 приняты обозначения:  $R_s, R_b$  – расчетные сопротивления арматуры и бетона; с учетом фрактального строения структуры;  $x_i$  – высота сжатой зоны;  $h, h_0$  – полная и рабочая высота сечения;  $A_s$  – площадь поперечного сечения арматуры;  $b$  – ширина поперечного сечения элемента;  $x_{ij}$  – высота зоны дегградации.

Введем обозначение:  $\xi_0 = x/h_0$ ;  $\xi_{ij} = x_{ij}/h_0$ ;  $\mu = A_s/bh_0$ . Тогда условие прочности можно записать в виде неравенства

$$M \leq M_{ui}, \quad (12)$$

где  $M_{ui}$  – момент воспринимаемый сечением и определяемый по соответствующей расчетной модели ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ) дегградации.

Для расчетной модели при  $i = 0$  можно записать

$$M_{u0} = R_b b x_0 (h_0 - 0,5x_0),$$

так как  $R_b b x_0 = R_s A_s$ , то, обозначив  $\xi_0 = x_0/h_0$ , получим  $\xi_0 = \mu(R_s/R_b)$ . Тогда формула примет вид

$$M_{u0} = \xi_0(1 - 0,5\xi_0)R_b b h_0^2 = \alpha_m R_b b h_0^2.$$

Рассмотрим расчетную модель гетерогенной деградации (см. рис. 12), анализ которой дает возможность получить два уравнения:

$$M_{u1} = R_b b(x_1 - x_{11})[h_0 - 0,5(x_1 - x_{11}) - x_{11}],$$

$$R_b b(x_1 - x_{11}) = R_s A_s.$$

Так как  $\frac{x_1}{h_0} = \xi_1$ ;  $\frac{x_{11}}{h_0} = \xi_{11}$ ;  $\frac{R_s}{R_b}\mu = \xi_0$ , то  $\xi_0 = \xi_1 - \xi_{11}$ . С учетом сделанных преобразований получаем формулу для определения  $M_{u1}$  в следующем виде:

$$M_{u1} = M_{u0} \left( 1 - \frac{\xi_{11}}{1 - 0,5\xi_0} \right) = M_{u0} \left( 1 - \frac{k(\xi)\sqrt{D_{mt} t / h^2}}{1 - 0,5\xi_0} \right). \quad (13)$$

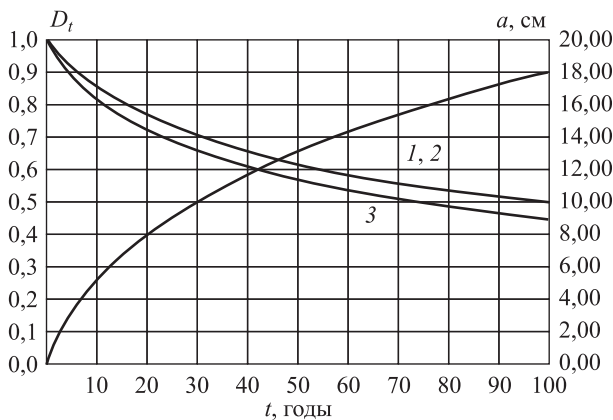
На рис. 13 показаны графики изменения несущей способности нормальных сечений изгибаемых элементов.

Расчет наклонных сечений железобетонных изгибаемых элементов на действие поперечной силы по прочности предложено производить по условию

$$Q \leq Q_b + Q_{sw}, \quad (14)$$

где  $Q_b$  – поперечная сила, воспринимаемая бетоном;  $Q_{sw}$  – поперечная сила, воспринимаемая поперечной арматурой.

Поперечное усилие  $Q_b$ , воспринимаемое бетоном, принято определять из условия, что разрушение не происходит, если главные нормальные напряжения не превосходят допустимого напряжения при растяжении  $\sigma_1 \leq R_{bt}$ .



*Рис. 13.* Графики изменения деградационных функций для соответствующих расчетных схем (1, 2) и график изменения глубинного показателя  $a$  (3)

*Fig. 13.* Graphs of changes in degradation functions for the corresponding design schemes (1, 2) and a graph of changes in the depth index  $a$  (3)

Тогда поперечная сила  $Q_b(t)$  будет определяться по формуле вида: если  $a$  и  $R_c$  равны нулю, то имеем формулу М.С. Барижанского

$$Q \leq \varphi \frac{R_{bt}bh^{2_0}}{C} \left[ 1 - \frac{a}{h}(1 - k_{x.c}) \right] + R_{sw}A_{sw}(t), \quad (15)$$

где  $a = k(\xi)\sqrt{D_{mt}}$ ;  $k_{x.c} = R_{bt}(t)/R_{bt}(0) = C_0 \exp\{-kt\}$ .

Формула (15) не отвечает принципу соответствия, так как при  $C = 0$  значение  $Q = \infty$ . Если нет агрессивной среды и  $C = 0$ , то имеем чистый срез и условие прочности должно принять вид формулы (16).

Согласно третьей теории прочности  $\tau \leq R_{bt}$ , имеем

$$Q \leq Q_{b3} = \varphi_1 R_{bt}bh. \quad (16)$$

Предполагается при анализе прочности наклонных сечений принять за критерий разрушения в виде условия (четвертое) прочности Кулона–Навье  $|\tau| + \gamma\sigma \leq R_{bt}$ , тогда получаем

$$Q \leq Q_{bu} = \varphi_1 \frac{R_{bt}bh}{1 + \gamma \frac{c}{h}} \left[ 1 - \frac{a}{h}(1 - k_{xc}) \right] + R_{sw}A_{sw}(t), \quad (17)$$

где  $\gamma$  – коэффициент трения.

Анализ полученных функций показал, что изменение поперечной силы зависит от соотношения  $C/h$  и коэффициента трения  $\gamma$ .

**Выводы.** 1. Результаты, получаемые по первой теории прочности, существенно отличаются от результатов, получаемых по третьей и четвертой теории прочности при соотношении  $C/h < 0,5$ . При соотношении  $C/h \approx 0,5$  все три проверяемые теории дают близкие по величине значения  $Q/R_{bt}bh$  (рис. 14, 15).

2. Если определять прочность бетона по формуле (9) и (10), то с помощью фрактальной размерности можно учесть влияние однородности структуры на прочность изделий.

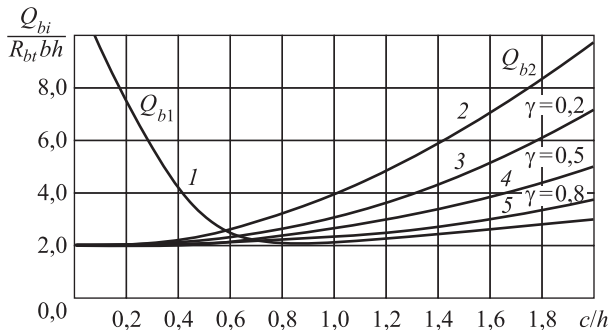


Рис. 14. Изменение поперечной силы при расчете по первой (1), третьей (2), четвертой (3, 4, 5) теории прочности

Fig. 14. Transverse force changing during the calculation according to the first (1), third (2), fourth (3, 4, 5) strength theory



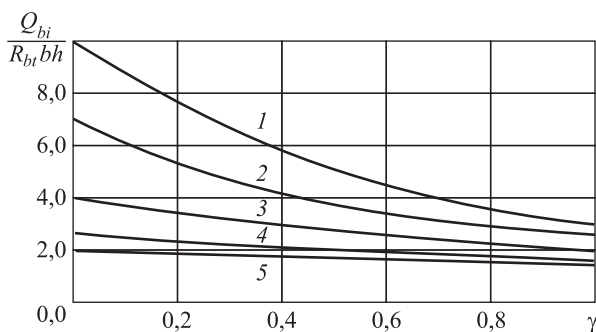


Рис. 15. Влияние коэффициента трения на поперечную силу при значениях  $C/h$

1 – 2; 2 – 1,5; 3 – 1,0; 4 – 0,5; 5 – 0,1

Fig. 15. Effect of the friction coefficient on the transverse force at  $C/h$  values

1 – 2; 2 – 1,5; 3 – 1,0; 4 – 0,5; 5 – 0,1

#### Список источников

1. Чернышев Е.М., Дьяченко Е.И., Макеев А.И. Неоднородность структуры и сопротивление разрушению конгломератных строительных композитов. Воронеж, 2012. 224 с.
2. Соломатов В.И., Выровой В.Н., Селяев В.П. Полиструктурная теория композиционных строительных материалов. Ташкент: ФАН, 1991. 345 с.
3. Скоробогатов С.М. Катастрофы и живучесть железобетонных сооружений (классификация и элементы теории). Екатеринбург: УрГУПС, 2009. 512 с.
4. Селяев В.П., Селяев П.В. Физико-химические основы механики разрушения цементных композитов. Саранск: Изд-во Морд. ун-та, 2018. 220 с.
5. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Изд-во Ин-та компьютер. исслед., 2002. 656 с.
6. Садовский М.А., Болховитинов Л.Г., Писаренко В.Ф. О свойстве дискретности горных пород // Физика земли. 1982. № 12. С. 3–18.
7. Садовский М.А. Иерархии от пылинок до планет // Земля и Вселенная. 1984. № 6. С. 3–11.
8. Федоров Л.Н., Брук М.А. От естественной кусковатости в природе к модели разрушения горных пород // Записки Горного института. 2007. С. 144–149.
9. Курленя М.В., Опарин В.Н. О масштабном факторе явления зональной дезинтеграции горных пород и канонических рядов атомно-ионных радиусов // ФТПРПИ. 1996. № 12. С. 3–14.
10. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. М.: Наука, 1991. 136 с.
11. Камарян Г.Г. Иерархия структурных и геодинамических характеристик земной коры // Геология, инженерная геология, гидрогеология, геокриология. 2002. № 6. С. 506–516.
12. Кайдо И.И. Кластерная модель явления зональной дезинтеграции массива вокруг подземных выработок // ГИАБ. 2009. № 6. С. 48–57.
13. Литвинский Г.Г. Аналитическая теория прочности горных пород и массивов. Донец: Норд – Пресс, 2008.
14. Чанышев А.И., Белоусова О.Е. Блочно-иерархическая модель деформирования и разрушения горных пород, экспериментальная проверка и теоретический анализ // Тектонофизика и актуальные вопросы земли: Материалы до-

- кладов Четвертой тектонофизической конференции в ИФЗ РАН. М., 2016. С. 404–413.
15. Христианович С.А. О модуле сцепления в теории трещин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1968. № 2. С. 69–75.
  16. Адушкин В.В. Особенности формирования материала заполнителя на характер сдвигового деформирования нарушения сплошности // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2007. № 3.
  17. Гудман Р.А. Механика скальных пород. М.: Стройиздат, 1987.
  18. Чаньшев А.И., Ефименко Л.А. Математические модели блочных сред в задачах геомеханики // ФТПРПИ. 2003. № 3. С. 73–84.
  19. Грэхэм Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика / пер. с англ. М.: Мир, 1998. 703 с.
  20. Новошилов В.В. Структурная макромеханика разрушения // Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33, № 2. С. 212–230.
  21. Петров Ю.В. Квантовая аналогия в механике разрушения твердых тел // Физика твердого тела. 1996. Т. 38, № 11. С. 3385–3393.
  22. Низина Т.А. Защитно-декоративные покрытия на основе эпоксидных и акриловых связующих. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2007. 260 с.
  23. Куприяшкина Л.И. Наполненные цементные композиты. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2007. 180 с.
  24. Селяев В.П., Соломатов В.И., Ошкина Л.М. Химическое сопротивление наполненных цементных композитов. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2000. 152 с.
  25. Селяев В.П., Селяев П.В., Сорокин Е.В., Алимов М.Ф. Аналитическое описание диаграмм деформирования бетона для расчета прогибов пластин из нелинейного деформируемого материала / Орлов. гос. ун-т им. И.С. Тургенева // Строительство и реконструкция. 2018. № 3. С. 22–30.

## References

1. Chernyshev E.M., Dyachenko E.I., Makeev A.I. Structural heterogeneity and fracture resistance of conglomerate building composites. Voronezh, 2012. 224 p. (In Russ.).
2. Solomatov V.I., Vyrovoy V.N., Selyaev V.P. Polystructural theory of composite striate materials. Tashkent: FAN, 1991. 345 p. (In Russ.).
3. Skorobogatov S.M. Disasters and survivability of reinforced concrete structures (classification and elements of theory). Yekaterinburg, 2009. 512 p. (In Russ.).
4. Selyaev V.P., Selyaev P.V. Physicochemical foundations of fracture mechanics of cement composites. Saransk, 2018. 220 p. (In Russ.).
5. Mandelbrot B. Fractal geometry of nature. Moscow, 2002. 656 p. (In Russ.).
6. Sadovskiy M.A., Bolkhovitinov L.G., Pisarenko V.F. On the property of the discreteness of rocks. *Fizika zemli = Physics of the earth*. 1982; (12): 3–18. (In Russ.).
7. Sadovskiy M.A. Hierarchies from dust grains to planets. *Zemlya i Vselennaya = Earth and the Universe*. 1984; (6): 3–11. (In Russ.).
8. Fedorov L.N., Bruk M.A. From natural lumpiness in nature to a model of rock destruction. *Zapiski Gornogo instituta = Notes of the Mining Institute*. 2007; (171): 144–149. (In Russ.).
9. Kurlenya M.V., Oparin V.N. On the large-scale factor of the phenomenon of zonal disintegration of rocks and canonical series of atomic-ionic radii. *Fiziko-tekhnicheskiye problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh = Physical and technical problems of the development of minerals*. 1996; (12): 3–14. (In Russ.).

10. Smirnov B.M. Physics of fractal clusters. Moscow, 1991. 136 p. (In Russ.).
11. Kamaryan G.G. Hierarchy of structural and geodynamic characteristics of the earth's crust. *Geologiya, inzhenernaya geologiya, gidrogeologiya, geokriologiya = Geology, engineering geology, hydrogeology, geocryology*. 2002; (6): 506–516. (In Russ.).
12. Kaydo I.I. Cluster model of the phenomenon of zonal disintegration of the massif around underground workings. *GIAB = GIAB*. 2009; (6): 48–57. (In Russ.).
13. Litvinskiy G.G. Analytical theory of the strength of rocks and massifs. Donets, 2008. (In Russ.).
14. Chanyshv A.I., Belousova O.E. Block-hierarchical model of deformation and destruction of rocks, experimental verification and theoretical analysis. Tectonophysics and current issues about the earth. Moscow, 2016. P. 404–413. (In Russ.).
15. Khristianovich S.A. On the adhesion modulus in the theory of cracks. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela = News of the Russian Academy of Sciences. Rigid body mechanics*. 1968; (2): 69–75. (In Russ.).
16. Adushkin V.V. Features of the formation of the filler material on the nature of shear deformation of discontinuity. *Fiziko-tekhnicheskiye problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh = Physical and technical problems of the development of minerals*. 2007; (3). (In Russ.).
17. Gudman R.A. Rock mechanics. Moscow: Stroyizdat, 1987. (In Russ.).
18. Chanyshv A.N., Efimenko L.A. Mathematical models of block media in problems of geomechanics. *Fiziko-tekhnicheskiye problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh = Physical and technical problems of the development of minerals*. 2003; (3): 73–84. (In Russ.).
19. Grehom R., Knut D., Patashnik O. Concrete mathematics. Moscow, 1998, 703 p. (In Russ.).
20. Novoshilov V.V. Structural Macromechanics of Fracture. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*. 1969; 33(2): 212–230. (In Russ.).
21. Petrov Yu.V. Quantum analogy in the fracture mechanics of solids. *Fizika tverdogo tela = Solid State Physics*. 1996; 38(11): 3385–3393. (In Russ.).
22. Nizina T.A. Protective and decorative coatings based on epoxy and acrylic binders. Saransk, 2007. 260 p. (In Russ.).
23. Kupriyashkina L.I. Filled cement composites. Saransk, 2007. 180 p. (In Russ.).
24. Selyaev V.P., Solomatov V.I., Oshkina L.M. Chemical resistance of filled cement composites. Saransk, 2000. 152 p. (In Russ.).
25. Selyaev V.P., Selyaev P.V., Sorokin E.V., Alimov M.F. Analytical description of concrete deformation diagrams for calculating deflections of plates made of nonlinear deformable material. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya = Construction and reconstruction*. 2018; (3): 22–30. (In Russ.).

#### **Информация об авторах**

**В.П. Селяев** – академик РААСН, доктор технических наук, профессор, nform80@mail.ru

**П.В. Селяев** – кандидат технических наук

**Е.Е. Хамза** – кандидат технических наук, erlan.hamza@mail.ru

#### **Information about the authors**

**V.P. Selyaev** – Academician RAACS, DSc, Professor, nform80@mail.ru

**P.V. Selyaev** – PhD

**Y.Y. Khamza** – PhD, erlan.hamza@mail.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 09.11.2021  
Одобрена после рецензирования 06.12.2021  
Принята к публикации 13.12.2021

The article was submitted 09.11.2021  
Approved after reviewing 06.12.2021  
Accepted for publication 13.12.2021

---